• Ορισμός:

Η εξίσωση $a_2(x)y'(x) + a_1(x)\cdot y(x) = 0$, $x \in I$
Είναι μια ομογενής, γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης και η συνάρτηση $a_2(x) \neq 0$.

Αν την προχωρήσαμε την εξίσωση τότε:

$$y'(x) + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y(x) = \frac{b(x)}{a_2(x)} \Rightarrow y'(x) + P(x)\cdot y(x) = q(x)$$

Και για να λυθεί τότε πολ/ζαμε με έναν ολοκληρωτικό παράγοντα, τον:

$$e^{\int P(x)dx}$$

Σημείωση:

Όταν πολ/σαμε την εξίσωση $a_2(x)\cdot y'(x)+a_1(x)y(x)=b(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'(x)+\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y(x)=\frac{b(x)}{a_2(x)} \Rightarrow y'(x)+p(x)\cdot y(x)=q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)dx}\cdot y'(x)+e^{\int p(x)dx}\cdot p(x)\cdot y(x)=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x),\ x\in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^{\int p(x)dx}\cdot y(x)\right)'=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)dx}\cdot y(x)=\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)\,dx+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)+dx}\cdot q(x)\,dx+C\right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1.4.111.

Να λυθεί η εξίσωση:

$$(3x^2+1)y' - 2xy = 6x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

$$y' - \frac{2x}{3x^2+1}\, y = \frac{6x}{3x^2+1} \quad , \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\int \frac{2x}{3x^2+1}dx} \cdot y' - e^{-\int \frac{2x}{3x^2+1}dx} \cdot \frac{2x}{3x^2+1}\, y = e^{-\int \frac{2x}{3x^2+1}dx} \cdot \frac{6x}{3x^2+1} , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\int \frac{2x}{3x^2+1}dx} \cdot y = c + \int \frac{6x}{3x^2+1} \cdot e^{-\int \frac{2x}{3x^2+1}dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{\int \frac{2x}{3x^2+1}dx} \cdot \left(c + \int \frac{6x}{3x^2+1} \cdot e^{-\int \frac{2x}{3x^2+1}dx} dx \right)$$

όπου $\displaystyle\int \frac{2x}{3x^2+1}dx = \frac{1}{3} \int \frac{(3x^2+1)'}{3x^2+1} dx = \frac{1}{3} \log(3x^2+1) =$

$$= \log(3x^2+1)^{1/3}$$

Άρα,

$$y = (3x^2+1)^{1/3} \cdot \left(c + \int \frac{6x}{3x^2+1} (3x^2+1)^{-1/3} dx \right)$$

$$= (3x^2+1)^{1/3} \cdot \left(c + \int \frac{6x}{(3x^2+1)^{4/3}} dx \right) =$$

$$= (3x^2+1)^{1/3} \cdot \left(c + 3 \cdot \log(3x^2+1)^{4/3} \right).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ένα μαθηματικό μοντέλο των διαφορικών εξισώσεων που ο ρυθμός μεταβολής εξαρτάται από μια ποσότητα είναι το εξής:

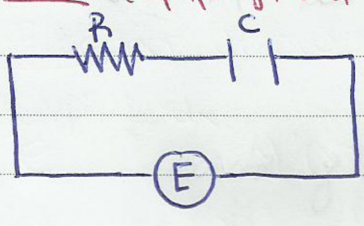
$$Q'(t) = k\cdot Q(t) \quad \text{όπου} \quad Q(t_0) = Q_0$$

Αυτή, η εξίσωση θα λυθεί ως εξής:

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = k \Rightarrow \log Q(t) = kt + c \Rightarrow Q(t) = e^{kt+c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(t) = c\cdot e^{kt}, \quad t \geq t_0 \quad \text{και} \quad k \in \mathbb{R}.$$

π.χ (εφαρμογή στα ηλεκτρικά κυκλώματα).



$E_R = R\cdot I$, $\quad E_L = L\cdot \frac{dI}{dt}$ (για πηνίο)

και $C_c = \frac{Q(t)}{C}$

Γνωστό ότι η τάση στα άκρα:

$$E(t) = R\cdot I(t) + C_c \Rightarrow E(t) = R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

$$Q'(t) + \frac{1}{C\cdot R}Q(t) = \frac{E(t)}{R} \quad \begin{cases} \xrightarrow{\text{συνεχή}} E(t) = E(t_0) \\ \rightarrow E_0\cdot \sin(\omega t). \end{cases}$$

Άσκηση φυλλαδίου (iv)

Να επιλυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$(1+x^2)\cdot y' + 4xy = x \quad \text{για} \quad y(1) = \frac{1}{4}$$

Λύση

Μέσω ορισμένης ολοκλήρωσης

$$y' + \frac{4x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{\int_1^x \frac{4t}{t^2+1}dx} \cdot y' + \frac{4x}{1+x^2} e^{\int_1^x \frac{4t}{t^2+1}dt} = \frac{x}{1+x^2} \cdot e^{\int_1^x \frac{4x}{1+x^2}dx}$$

$$\Rightarrow \left(y \cdot e^{\int_1^x \frac{4t}{t^2+1}dt}\right)' = \frac{x}{1+x^2} e^{\int_1^x \frac{4x}{1+x^2}dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\int_1^x \frac{4t}{t^2+1}dt} \cdot y - e^{\int_1^1 4t/t^2+1\, dt} \cdot y(1) = \int_1^x e^{\int_1^u \frac{4t}{t^2+1}dt} \cdot \frac{u}{1+u^2} du$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int_1^x \frac{4t}{t^2+1}dt} \cdot \left(y(1) + \int_1^x \frac{u}{1+u^2} \cdot e^{\int_1^u \frac{4t}{t^2+1}dt} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Ασκηση 3 (φυλλαδίου)

Να επιλυθεί το αρχικό πρόβλημα τιμών

$$y' + y = g(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0,1] \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad \text{και } y(0) = 0$$

Λύση

Η g δεν είναι συνεχής αλλά η g είναι ολοκληρώσιμη σε όλο το Π.Ο της

$$e^x \cdot y' + y \cdot e^x = g(x)\, e^x, \quad x \geq 0$$

$$(e^x y)' = g(x) \cdot e^x, \quad x \geq 0$$

ολοκληρώνουμε ορισμένα, άρα:

$$e^x y(x) - e^0 y(0) = \int_0^x e^s \cdot g(s)\, ds$$

$$y(x) = e^{-x} \cdot \int_0^x e^s \cdot g(s)\, ds$$

- $0 \leq x \leq 1$: $\quad y(x) = e^{-x} \cdot \int_0^x e^s \cdot 2\, ds = 2 \cdot e^{-x}(e^x - 1)$

- $x > 1$: $\quad y(x) = e^{-x} \int_0^x e^s \cdot g(s)\, ds =$

$$= e^{-x}\left(\int_0^1 e^s \cdot 2\, ds + \int_1^x e^s\, 0\, ds\right) =$$

$$= e^{-x} \cdot (2e - 2).$$

Τέλος, γεννάται ένα ερώτημα αν $\exists\, y'(1)$.
Απλώς εξετάζουμε με τον ορισμό της ύπαρξης παραγώγου
ώστε να εξετάσουμε και την αναγκαία συνθήκη (δηλ.
να δούμε εάν πράγματι η $y(x)$ ρίζα της εξίσωσης)